

Pratique Supplémentaire 8 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 4.6, 4.7, 5.1, 5.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit \mathbb{P}_2 l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 .

1. Décrire tous les sous-espaces de \mathbb{P}_2 (en fonction du nombre d'éléments de leurs bases).
2. Calculer le vecteur de coordonnées du polynôme $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$ dans la base $\mathcal{F} = (1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2)$.

La partie 1. vous propose de réfléchir aux sous-espaces de polynômes de façon géométrique : pensez-y quelques instants et puis lisez la solution.

Sol.: Soit \mathbb{P}_2 l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 .

1. Nous nous trouvons dans un espace vectoriel de dimension 3. Il y a donc des sous-espaces de dimension zéro, 1, 2 et 3. Nous savons que le seul sous-espace de dimension zéro est formé par le seul polynôme nul $\{0\}$. De même le seul sous-espace de dimension 3 est \mathbb{P}_2 tout entier.

Les sous-espaces de dimension 1 sont de la forme $\text{Vect}\{p\}$ pour un polynôme non nul p . Il s'agit donc d'une "droite" formée de tous les multiples scalaires de p . Les sous-espaces de dimension 2 sont de la forme $\text{Vect}\{p, q\}$ pour deux polynômes non proportionnels p et q . Il s'agit donc d'un "plan" formé de toutes les combinaisons linéaires $\alpha p + \beta q$.

2. Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de la base \mathcal{F} dans la base canonique. La matrice P est la matrice de changement de coordonnées de la base \mathcal{F} vers la base canonique $\mathcal{C}an$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche les composantes de $1 + 4t + 7t^2$ dans cette base, donc on doit résoudre le système $P(f)_{\mathcal{F}} = (f)_{\mathcal{C}an}$, où $(f)_{\mathcal{C}an}$ est le vecteur des coordonnées de $1 + 4t + 7t^2$ dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donnée par $(f)_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. La matrice $m \times n$ définie par $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelée “matrice de rang un”. Utiliser la définition du rang pour démontrer que le rang de $\vec{u} \vec{v}^T$ est effectivement 1.

Sol.: Les colonnes de la matrice $\vec{u} \vec{v}^T$ sont toutes multiples de \vec{u} , ce qui signifie que $\text{Im}(\vec{u} \vec{v}^T) = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ est de dimension 1.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout \vec{b} dans \mathbb{R}^m si et seulement si $A^T\vec{y} = \vec{0}$ n’admet que la solution triviale $\vec{y} = \vec{0}$.

Sol.: Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Dire que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet toujours une solution est équivalent à dire que A est surjective, i.e. $\dim \text{Im}A = m$. Par le Théorème du rang la dimension du noyau de A vaut $n - m$, ou encore le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension m . Les lignes de A étant les colonnes de A^T ceci veut dire que $\dim \text{Im}A^T = m$. Une dernière application du Théorème du rang nous permet enfin de conclure que $\dim \text{Ker}A^T = m - m = 0$. La matrice A^T représente donc une application linéaire injective. Ceci équivaut à dire que l’équation $A^T\vec{x} = 0$ n’admet que la solution triviale.

Exercice 4

Considérer l’application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Sol.: Le solutionnaire propose une façon de résoudre l’exercice qui est différente de (mais équivalente à) celle que l’on a vue en classe.

On exprime d’abord T dans la base canonique :

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, puisque les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ sont donnés par

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_4, \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \quad \vec{b}_4 = 2\vec{e}_4,$$

on a la matrice de changement de base :

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son inverse se calcule par exemple en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, qui donne

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule alors

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$